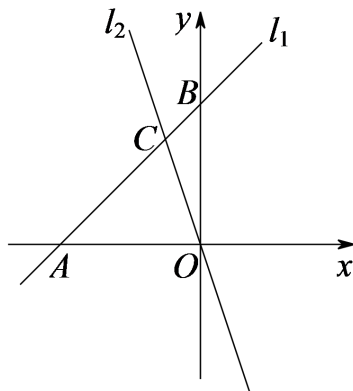


第3讲 一次函数与轴对称综合（练习）

一、一次函数与等腰三角形综合

1. 如图，已知直线 $l_1: y = x + b$ 和直线 $l_2: y = -3x$ 。其中直线 l_1 分别交 x 轴、 y 轴于点 A 、 B ，与直线 l_2 交于点 $C(-1, n)$ 。



- (1) 求 b, n 的值。
- (2) 请问在 x 轴上是否存在点 P ，使得 $\triangle ABP$ 为等腰三角形？若存在，请求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。

【答案】 (1) $b = 4, n = 3$ 。

(2) 存在， $P(-4 - 4\sqrt{2}, 0)$ 、 $P(-4 + 4\sqrt{2}, 0)$ 、 $P(4, 0)$ 或 $P(0, 0)$ 。

【解析】 (1) $C(-1, 3)$ ， $l_1: y = x + 4$ ，即 $b = 4, n = 3$ 。

(2) 方法一：几何法：

两圆一垂，可确定一共有四个点符合题意

① $AP = AB$ ： $AP = AB = 4\sqrt{2}$ ， $\therefore$

$OP = 4 + 4\sqrt{2}$ 或 $OP = 4\sqrt{2} - 4$ ，即

$P(-4 - 4\sqrt{2}, 0)$ 或 $P(-4 + 4\sqrt{2}, 0)$ ；

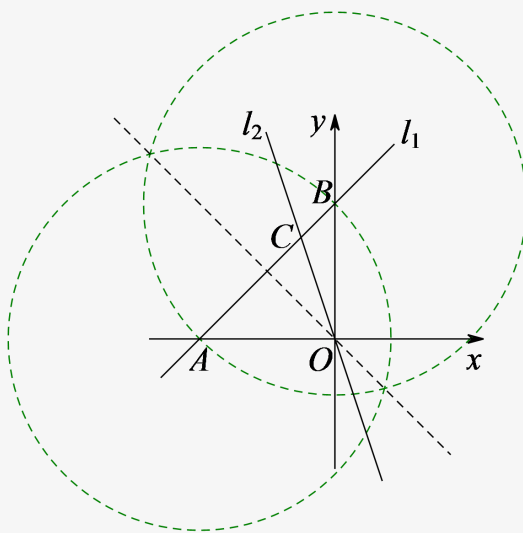
② $BP = BA$ ： $BP = BA = 4\sqrt{2}$ ， $\therefore$

如图可得，此时 BO 垂直平分 AP ，

即 $OA = OP$ ， $\therefore P(4, 0)$ ；

③ $PA = PB$ ： $\because \triangle ABO$ 为等腰直角

三角形， $\therefore OA = OB$ ，此时 P 和 O 重合，即 $P(0, 0)$ ，



综上： $P(-4-4\sqrt{2}, 0)$ 、 $P(-4+4\sqrt{2}, 0)$ 、 $P(4, 0)$ 或 $P(0, 0)$ 。

方法二：代数法：

设 $P(t, 0)$ ，则 $PA^2 = (t+4)^2 = t^2 + 8t + 16$ ， $PB^2 = t^2 + 16$ ， $AB^2 = 32$

① $AP = AB$ ： $t^2 + 8t + 16 = 32$ ，解得 $t = -4 \pm 4\sqrt{2}$ ，即 $P(-4-4\sqrt{2}, 0)$ 或 $P(-4+4\sqrt{2}, 0)$ ；

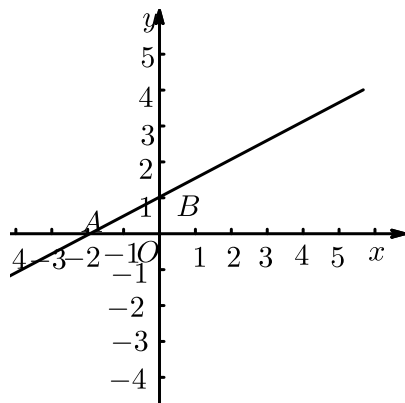
② $BP = BA$ ： $t^2 + 16 = 32$ ，解得 $t = \pm 4$ ，即 $P(4, 0)$ 或 $P(-4, 0)$ （与 A 重合，舍去）；

③ $PA = PB$ ： $t^2 + 8t + 16 = t^2 + 16$ ，解得 $t = 0$ ，即 $P(0, 0)$ ；

综上： $P(-4-4\sqrt{2}, 0)$ 、 $P(-4+4\sqrt{2}, 0)$ 、 $P(4, 0)$ 或 $P(0, 0)$ 。

【标注】【知识点】一次函数与动点问题

2. 如图，已知直线 $l: y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象与 x 轴、 y 轴交于 A 、 B 两点， $A(-2, 0)$ ， $B(0, 1)$ 。



(1) 求直线 l 的函数表达式。

(2) 若 P 是 x 轴上的一个动点，请直接写出当 $\triangle PAB$ 是等腰三角形时 P 的坐标。

(3) 在 y 轴上有点 $C(0, 3)$ ，点 D 在直线 l 上，若 $\triangle ACD$ 面积等于4，求点 D 的坐标。

【答案】(1) $y = \frac{1}{2}x + 1$ 。

(2) 点 P 的坐标为 $(-2 - \sqrt{5}, 0)$ 或 $(\sqrt{5} - 2, 0)$ 或 $(2, 0)$ 或 $(-\frac{3}{4}, 0)$ 。

(3) 点 D 的坐标为 $(2, 2)$ 或 $(-6, -2)$ 。

【解析】(1) $\because y = kx + b$ 经过点 $A(-2, 0)$ ， $B(0, 1)$ ，

$$\therefore \begin{cases} -2k + b = 0 \\ b = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases},$$

所以，直线 l 的表达式为 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 。

(2) 由勾股定理得， $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ，

① $PA = AB$ 时，若点 P 在点 A 的左边，则 $OP = 2 + \sqrt{5}$ ，此时点 P 的坐标为 $(-2 - \sqrt{5}, 0)$ ，

若点 P 在点 A 的右边, 则 $OP = \sqrt{5} - 2$, 此时点 P 的坐标为 $(\sqrt{5} - 2, 0)$,

② $PB = AB$ 时, 由等腰三角形三线合一的性质得, $OP = OA$,

所以, 点 P 的坐标为 $(2, 0)$,

③ $PA = PB$ 时, 设 $PA = PB = x$,

在 $\text{Rt}\triangle POB$ 中,

$$x^2 = 1^2 + (2 - x)^2,$$

$$\therefore x = \frac{5}{4}$$

$$\therefore AP = \frac{5}{4}, OP = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \text{点}P\text{得到坐标为}(-\frac{3}{4}, 0),$$

综上, 点 P 的坐标为 $(-2 - \sqrt{5}, 0)$ 或 $(\sqrt{5} - 2, 0)$ 或 $(2, 0)$ 或 $(-\frac{3}{4}, 0)$.

(3) $\because B(0, 1), C(0, 3)$,

$$\therefore BC = 3 - 1 = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = 2,$$

$\therefore$ 点 D 在点 B 的右侧时, $S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BCD}$,

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times (2 + x_D) = 4,$$

$$\text{解得 } x_D = 2,$$

$$\text{此时 } y = \frac{1}{2} \times 2 + 1 = 2,$$

点 D 的坐标为 $(2, 2)$,

点 D 在点 A 的左侧时,

$$S_{\triangle ACD} = S_{\triangle BCD} - S_{\triangle ABC}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times (-x_D - 2) = 4,$$

$$\text{解得 } x_D = -6,$$

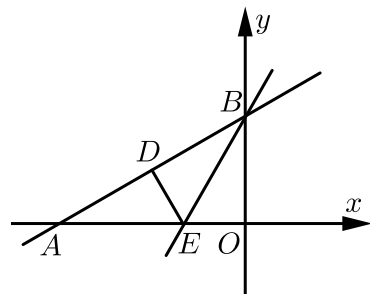
$$\text{此时, } y = -6 \times \frac{1}{2} + 1 = -2,$$

点 D 的坐标为 $(-6, -2)$,

综上所述, 点 D 的坐标为 $(2, 2)$ 或 $(-6, -2)$.

【标注】【知识点】一次函数与面积

3. 如图, $\text{Rt}\triangle AOB$ 在平面直角坐标系中, 点 O 与坐标原点重合, A 在 x 轴上, 点 B 在 y 轴上, $OB = 2\sqrt{3}$, $AO = 6$, 将 $\triangle AOB$ 沿直线 BE 折叠, 使得 OB 边落在 AB 上, 点 O 与点 D 重合.



- (1) 求直线 BE 的解析式 .
- (2) 求点 D 的坐标 .
- (3) x 轴上是否存在点 P , 使 $\triangle PAD$ 为等腰三角形? 若存在, 请直接写出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由 .

【答案】 (1) $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$.

(2) $(-3, \sqrt{3})$.

(3) $(-6 + 2\sqrt{3}, 0)$, $(-6 - 2\sqrt{3}, 0)$, $(0, 0)$, $(-4, 0)$.

【解析】 (1) 设 $E(x, 0)$, $x^2 + (2\sqrt{3})^2 = (6 - x)^2$,

解得 $x = 2$, $E(-2, 0)$,

可求得直线 BE 的解析式为 $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$.

(2) 点 D 的坐标为 $(-3, \sqrt{3})$.

(3) x 轴上存在点 P , 使 $\triangle PAD$ 为等腰三角形;

$A(-6, 0)$, $D(-3, \sqrt{3})$, $P(x, 0)$,

$$AD^2 = (-6 + 3)^2 + (0 - \sqrt{3})^2 ,$$

$$AP^2 = (x + 6)^2 + (0 - 0)^2 ,$$

$$PD^2 = (x + 3)^2 + (0 - \sqrt{3})^2 ,$$

① $\angle A$ 为顶角 , $AD^2 = AP^2$,

$$(-6 + 3)^2 + (0 - \sqrt{3})^2 = (x + 6)^2 + (0 - 0)^2 ,$$

解得 $x = -6 \pm 2\sqrt{3}$,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-6 + 2\sqrt{3}, 0)$, $(-6 - 2\sqrt{3}, 0)$;

② $\angle D$ 为顶角 , $DA^2 = DP^2$,

$$(-6 + 3)^2 + (0 - \sqrt{3})^2 = (x + 3)^2 + (0 - \sqrt{3})^2 ,$$

解得 $x_1 = -6$ (舍去) , $x_2 = 0$, $\therefore P(0, 0)$;

③ $\angle P$ 为顶角 , $PD^2 = PA^2$,

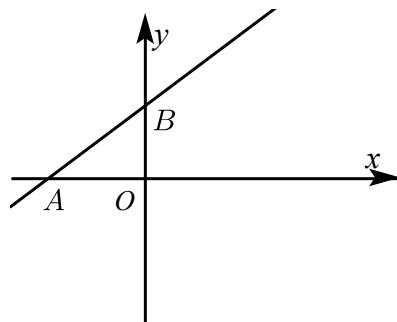
$$(x + 6)^2 + (0 - 0)^2 = (x + 3)^2 + (0 - \sqrt{3})^2 ,$$

解得 $x = -4$, $\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-4, 0)$;

综上所述， x 轴上存在点 P ，使 $\triangle PAD$ 为等腰三角形，点 P 的坐标为 $(-6+2\sqrt{3}, 0)$ ， $(-6-2\sqrt{3}, 0)$ ， $(0, 0)$ ， $(-4, 0)$ 。

【标注】【知识点】一次函数与等腰三角形结合

4. 已知直线 $y = \frac{3}{4}x + 3$ 与 x 轴和 y 轴分别交于 A 、 B 两点，另一直线经过点 B 和点 $C(6, -5)$ 。



- (1) 求 A 、 B 两点的坐标。
 (2) 证明： $\triangle ABC$ 是直角三角形。
 (3) 在 x 轴上找一点 P ，使 $\triangle BCP$ 是以 BC 为底边的等腰三角形，求出 P 点坐标。

【答案】 (1) $A(-4, 0)$ ， $B(0, 3)$ 。

(2) 证明见解析。

(3) $P(\frac{13}{3}, 0)$ 。

【解析】 (1) 把 $y = 0$ 代入 $y = \frac{3}{4}x + 3$ ，

解得 $x = -4$ 。

$\therefore A(-4, 0)$ 。

把 $x = 0$ 代入 $y = \frac{3}{4}x + 3$ ，

解得 $y = 3$ 。

$\therefore B(0, 3)$ 。

(2) 如图，过 C 作 $CD \perp x$ 轴于 D ， $CE \perp y$ 轴于 E 。

由题意得： $CD = 5$ ， $CE = 6$ ， $AO = 4$ ， $BO = 3$ ，

$AD = 10$ ， $BE = 8$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中， $AC^2 = AD^2 + CD^2 = 10^2 + 5^2 = 125$ ，

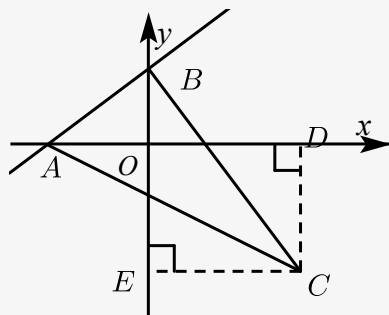
，

在 $\text{Rt}\triangle BEC$ 中， $BC^2 = BE^2 + CE^2 = 8^2 + 6^2 = 100$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中， $AB^2 = AO^2 + BO^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 中， $AB^2 + BC^2 = AC^2$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形。



(3) 由题意得, P 在 BC 的垂直平分线上, 可知符合条件的 P 的坐标只有一个, 如图所示,

设 $P(m, 0)$.

$$\therefore PO = |m|, DP = |6 - m|,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BOP \text{ 中, } BP^2 = 3^2 + |m|^2 = 9 + m^2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle PDC \text{ 中, } PC^2 = 5^2 + |6 - m|^2 = 25 + (6 - m)^2$$

,

$\therefore \triangle BPC$ 是以 BC 为底的等腰三角形,

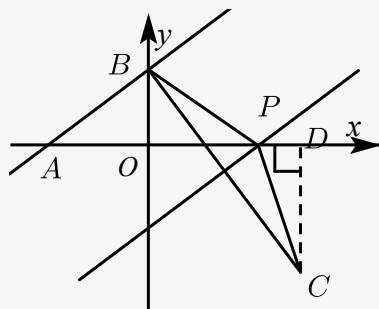
$$\therefore BP = PC.$$

$$\text{即 } BP^2 = PC^2.$$

$$9 + m^2 = 25 + (6 - m)^2,$$

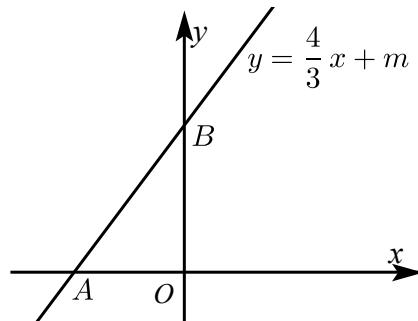
$$m = \frac{13}{3},$$

$$\therefore P\left(\frac{13}{3}, 0\right).$$



【标注】【知识点】一次函数与直角三角形结合

5. 如图, 已知一次函数 $y = \frac{4}{3}x + m$ 的图象与 x 轴交于点 $A(-6, 0)$, 交 y 轴于点 B .



(1) 求 m 的值与点 B 的坐标.

(2) 若点 C 在坐标轴上, 且使得 $\triangle ABC$ 的面积为 12, 请求出点 C 的坐标.

(3) 若点 P 在 x 轴上, 且 $\triangle ABP$ 为等腰三角形, 请直接写出点 P 的坐标.

【答案】 (1) $m = 8$, $B(0, 8)$.

(2) $(-3, 0)$ 或 $(-9, 0)$ 或 $(0, 12)$ 或 $(0, 4)$.

(3) $P_1(-16, 0)$, $P_2(4, 0)$, $P_3(6, 0)$ 或 $P_4\left(\frac{7}{3}, 0\right)$.

【解析】 (1) 把点 $A(-6, 0)$ 代入 $y = \frac{4}{3}x + m$, 得 $m = 8$,

$$\therefore B(0, 8).$$

(2) 存在.

① 当点 C 位于 x 轴上, 设 C 点坐标为 $(a, 0)$,

$$\therefore AC = |a + 6| ,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times |a + 6| \times 8 = 12 , \text{ 解得 } a = -3 \text{ 或 } -9 ,$$

此时点C坐标(-3,0)或(-9,0) .

②当点C位于y轴上, 设C点坐标为(0,b) ,

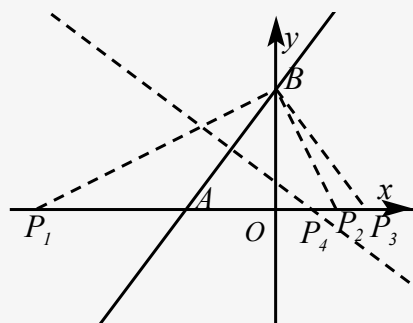
$$\therefore BC = |8 - b| ,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times b \times |8 - b| = 12 , \text{ 解得 } b = 4 \text{ 或 } 12 ,$$

此时点C坐标(0,12)或(0,4) .

综上所述, 点C的坐标为(-3,0)或(-9,0)或(0,12)或(0,4) .

(3) 如图 ,



①当 $AB = AP$ 时, $AP = AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$,

可得 $P_1(-16, 0)$, $P_2(4, 0)$.

②当 $BA = BP$ 时, $OA = OP$ 可得 $P_3(6, 0)$.

③当 $PA = PB$ 时, 线段AB的垂直平分线为 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$ 可得 $P_4(\frac{7}{3}, 0)$.

【标注】【知识点】一次函数与等腰三角形结合

二、一次函数与最短路径综合

6. 在直角坐标系中, x 轴上的动点 $M(x, 0)$ 到定点 $P(5, 5)$ 、 $Q(2, 1)$ 的距离分别为 MP 和 MQ , 那么, 当 $MP + MQ$ 取最小值时, 点 M 的横坐标 $x = ()$.

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{5}{2}$

C. $\frac{4}{3}$

D. $\frac{7}{2}$

【答案】 B

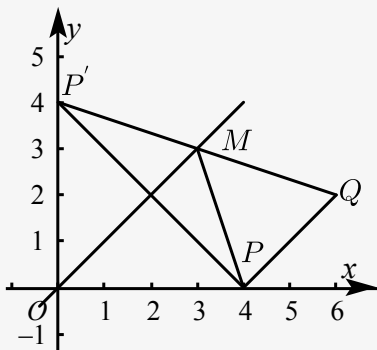
【解析】 取点 Q 关于 x 轴的对称点 $Q'(2, -1)$, 当点 P 、 M 、 Q' 三点共线时, $MP + MQ$ 最小, 直线 PQ' 的解析式为: $y = 2x - 5$, 令 $y = 0$, 则 $x = \frac{5}{2}$.

【标注】【知识点】一次函数与轴对称最值问题

7. 已知点 P 坐标是 $(4, 0)$ ，点 Q 坐标是 $(6, 2)$ ，在直线 $y = x$ 上找一点 M ，使得 $\triangle QMP$ 的周长最小，则点 M 的坐标为_____.

【答案】 $(3, 3)$

【解析】 作点 P' 与点 P 关于直线 $y = x$ 对称，



$\therefore$ 点 P' 与点 P 关于直线 $y = x$ 对称

$\therefore$ 点 P' 的坐标为 $(0, 4)$.

连接 $P'Q$ 交直线 $y = x$ 与点 M ，由轴对称的性质可知： $P'M = PM$ ，

$\therefore \triangle MPQ$ 的周长 $= PQ + QM + PM = PQ + P'Q$.

当点 P' 、 M 、 Q 在一条直线上时，三角形的周长有最小值.

设直线 $P'Q$ 的解析式为 $y = kx + b$ ，将 P' 、 Q 的坐标代入得： $\begin{cases} 6k + b = 2 \\ b = 4 \end{cases}$ ，

解得： $\begin{cases} k = -\frac{1}{3} \\ b = 4 \end{cases}$

$\therefore$ 直线 $P'Q$ 的解析式为 $y = -\frac{1}{3}x + 4$

将 $y = -\frac{1}{3}x + 4$ 与 $y = x$ 联立得 $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + 4 \\ y = x \end{cases}$ ，

解得： $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(3, 3)$.

故答案为： $(3, 3)$.

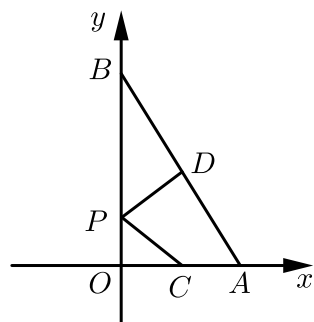
【标注】 【知识点】 一次函数与轴对称最值问题

8. 如图，在直角坐标系中， $A(0, 2)$ ， $B(4, 3)$ ，点 M 是 x 轴正半轴上的一个动点.
- (1) 当点 M 到 A ， B 两点的距离相等时，求点 M 的坐标.
 - (2) 当点 M 到 A ， B 两点的距离之和最小时，求点 M 的坐标，并求出此时 $AM + BM$ 的值.

$$\begin{aligned} \therefore \begin{cases} b=2 \\ k=\frac{5}{4} \end{cases}, \\ \therefore \text{直线 } AB: y = \frac{5}{4}x - 2, \\ \therefore \text{当 } y=0, x = \frac{8}{5}, \\ \therefore M\left(\frac{8}{5}, 0\right), \\ AM + BM = AB = \sqrt{(4-0)^2 + [3-(-2)]^2} = \sqrt{41}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】一次函数与轴对称最值问题

9. 如图，一次函数 $y = kx + b$ 的图象与 x 、 y 轴分别交于点 $A(2, 0)$ 、 $B(0, 4)$ 。



(1) 求该函数的解析式。

(2) O 为坐标原点，设 OA 、 AB 的中点分别为 C 、 D ， P 为 OB 上一动点，求 $PC + PD$ 的最小值，并求取得最小值时 P 点的坐标。

【答案】 (1) $y = -2x + 4$

(2) $2\sqrt{2}$ ，点 P 坐标为 $(0, 1)$ 。

【解析】 (1) 将 $A(2, 0)$ 、 $B(0, 4)$ 代入 $y = kx + b$ 得 $k = -2$ ， $b = 4$ 。

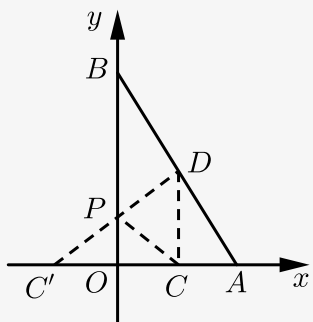
$\therefore$ 解析式为： $y = -2x + 4$ 。

(2) 设点 C 关于点 O 的对称点为 C' ，连接 PC 、 DC' ，则 $PC = PC'$ 。

$\therefore PC + PD = PC' + PD \geq C'D$ ，即 C' 、 P 、 D 共线时， $PC + PD$ 的最小值是 $C'D$ 。

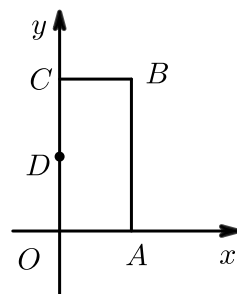
连接 CD ，在 $\text{Rt}\triangle DCC'$ 中， $C'D = 2\sqrt{2}$ ；

易得点 P 坐标为 $(0, 1)$ 。



【标注】【知识点】一次函数与轴对称最值问题

10. 如图，在平面直角坐标系中， O 为坐标原点，长方形 $OABC$ 中，点 B 的坐标为 $(3,8)$ ，点 A 、 C 分别在坐标轴上， D 为 OC 的中点。



- (1) 在 x 轴上找一点 P ，使得 $PD + PB$ 最小，则点 P 的坐标为 _____。
- (2) 在 x 轴上找一点 Q ，使得 $|QD - QB|$ 最大，取出点 Q 的坐标并说明理由。

【答案】(1) (1,0)

(2) Q 点坐标 $(-3,0)$ 。

【解析】(1) 由题意可得 D 关于 x 轴的对称点为 $D'(0, -4)$ ，

设 BD' 所在直线解析式为 $y = kx + b$ ($k \neq 0$)，

将 $B(3,8)$ ， $D'(0,-4)$ 代入得 $y_{BD'} = 4x - 4$ 。

令 $y = 0$ ，得 $x = 1$ 。

则 P 坐标为 $(1,0)$ 。

(2) 连接 QD 、 QB 、 BD ，

在 $\triangle QBD$ 中，

$|QD - QB| < BD$ ，

当 Q 、 B 、 D 共线时，

$|QD - QB|$ 取到最大值等于 BD 。

$BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = 5$ 。

设过 B 、 D 的直线表达式为 $y = kx + b$ ，

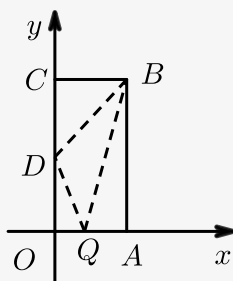
将 $B(3,8)$ ， $D(0,4)$ 代入得：

$$\begin{cases} 3k + b = 8 \\ b = 4 \end{cases}$$

解得： $\begin{cases} k = \frac{4}{3} \\ b = 4 \end{cases}$ 。

$\therefore y = \frac{4}{3}x + 4$ 。

令 $y = 0$ ，得 $x = -3$ 。



$\therefore Q$ 点坐标 $(-3, 0)$.

【标注】【能力】运算能力

【知识点】一次函数与轴对称最值问题

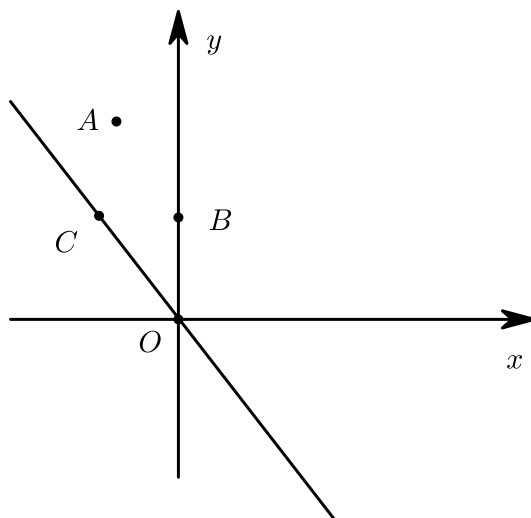
【知识点】一次函数的解析式

【知识点】一次函数与一元一次方程

【知识点】坐标系中的对称-点关于坐标轴对称

【知识点】坐标与距离

11. 如图，在平面直角坐标系中，有点 $A(-1, 3)$ ， $B(0, m)$ ， C 在直线 $y = -x$ 上，当 $\triangle ABC$ 的周长最短时，求直线 BC 的解析式及 B ， C 的坐标，并求出最小周长 .



【答案】 $2\sqrt{5}$.

【解析】分别作 A 关于 y 轴和直线 $y = -x$ 的对称点 $A_1(1, 3)$ ， $A_2(-3, 1)$

连结 A_1A_2 与 y 轴和直线 $y = -x$ 的交点即为点 B ， C ，

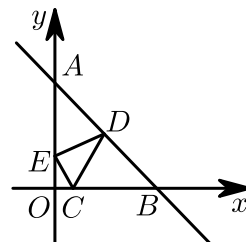
可求直线 BC 解析式为 $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ，

得： $B(0, \frac{5}{2})$ ， $C(-5, 5)$

最短周长为 $\sqrt{(3-1)^2 + (1+3)^2} = 2\sqrt{5}$.

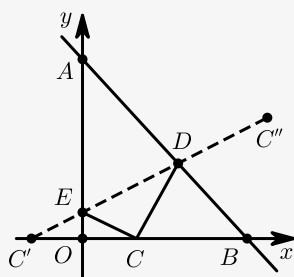
【标注】【知识点】一次函数与轴对称最值问题

12. 如图所示，已知点 $C(1, 0)$ ，直线 $y = -x + 7$ 与两坐标轴分别交于 A 、 B 两点， D 、 E 分别是 AB ， OA 上的动点，则 $\triangle CDE$ 周长的最小值是 _____ .



【答案】 10

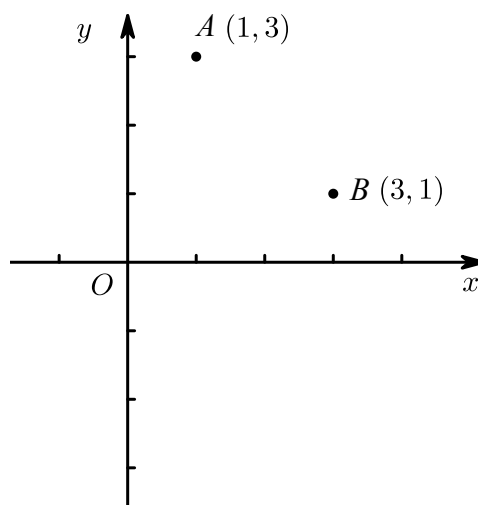
【解析】 如图，点 C 关于 OA 的对称点 $C'(-1,0)$ ，点 C 关于直线 AB 的对称点 $C''(7,6)$ ，连接 $C'C''$ 与 AO 交于点 E ，与 AB 交于点 D ，此时 $\triangle DEC$ 周长最小，



$$\triangle DEC \text{ 周长} = DE + EC + CD = EC' + ED + DC'' = C'C'' = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 .$$

【标注】 【知识点】 一次函数与轴对称最值问题

13. 如图，在 x 轴上一点 C ，在 y 轴上找一点 D ， $AD + CD + BC$ 值最小，求最小值及 C ， D 坐标。



【答案】 $4\sqrt{2}$ ， $C(2,0)$ ， $D(0,2)$ 。

【解析】 如图，最小值 $AD + CD + BC = A'B' = \sqrt{(-1-3)^2 + (3+1)^2} = 4\sqrt{2}$ 。

设 $A'B'$ 的直线 l 为 $y = kx + b$ ，

将 $A'(-1,3)$ ， $B'(3,-1)$ 代入直线 l 得

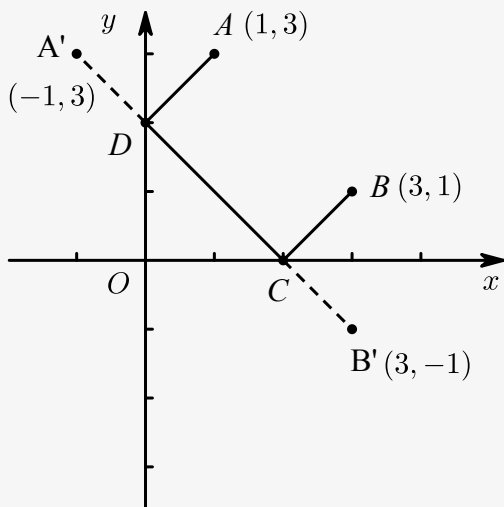
$$\begin{cases} -k + b = 3 \\ 3k + b = -1 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -1 \\ b = 2 \end{cases},$$

所以 $l: y = -x + 2$.

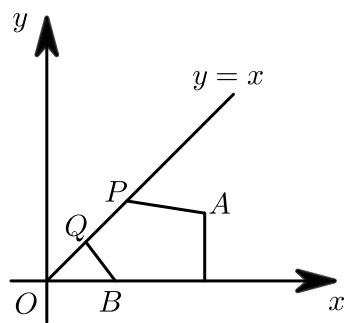
令 $y = 0$, 解得 C 点的坐标为 $(2, 0)$,

令 $x = 0$, 解得 D 点的坐标为 $(0, 2)$.



【标注】【知识点】一次函数与轴对称最值问题

14. 如图, 已知 $A(3, 1)$ 与 $B(1, 0)$, PQ 是直线 $y = x$ 上的一条动线段且 $PQ = \sqrt{2}$ (Q 在 P 的下方), 当 $AP + PQ + QB$ 最小时, Q 点坐标为 ().



A. $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

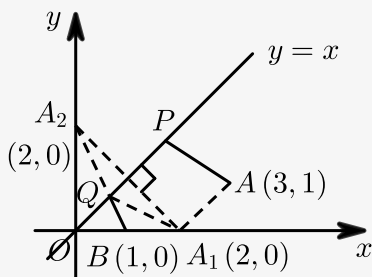
B. $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

C. $(0, 0)$

D. $(1, 1)$

【答案】 A

【解析】 如图:



①将 $A(3,1)$ 沿平行于 $y=x$ 的方向向下平移 $\sqrt{2}$ 个单位至点 $A_1(2,0)$ ；

②作 $A_1(2,0)$ 关于 $y=x$ 对称点的 $A_2(0,2)$ ；

③连接 A_2B 交 $y=x$ 于点 Q ；

④在 Q 上方找点 P ，使得 $PQ = \sqrt{2}$ ， P 在 $y=x$ 上；

⑤连接 PA ．

$\because A_2(0,2)$ ， $B(1,0)$ ，

$\therefore$ 直线 BA_2 解析式为： $y = -2x + 2$ ，

$$\text{联立} \begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = x \end{cases},$$

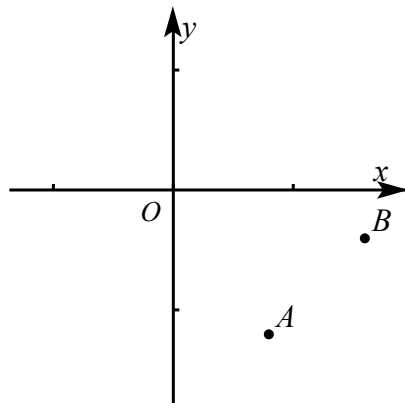
$$\text{解得} \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases},$$

$\therefore Q$ 点坐标为 $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ ．

故选A．

【标注】【知识点】一次函数与轴对称最值问题

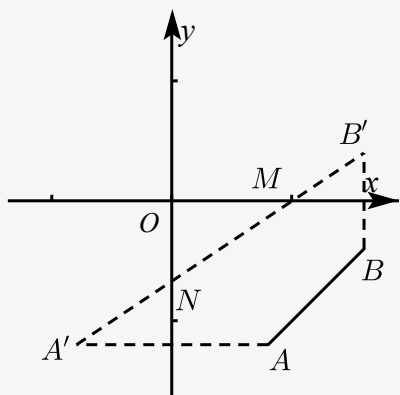
15. 如图，已知平面直角坐标系， A ， B 两点的坐标分别为 $A(4, -6)$ ， $B(8, -2)$ ．设 M ， N 分别为 x 轴和 y 轴上的动点，请问：是否存在这样的点 $M(m, 0)$ ， $N(0, n)$ ，使四边形 $ABMN$ 的周长最短？若存在，请求出 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $n = \underline{\hspace{2cm}}$ ；若不存在，请说明理由．



【答案】 5 ； $-\frac{10}{3}$

【解析】 存在使四边形 $ABMN$ 周长最短的点 M 、 N ，

作 A 关于 y 轴的对称点 A' ，作 B 关于 x 轴的对称点 B' ，连接 $A'B'$ ，与 x 轴、 y 轴的交点即为点 M 、 N ，

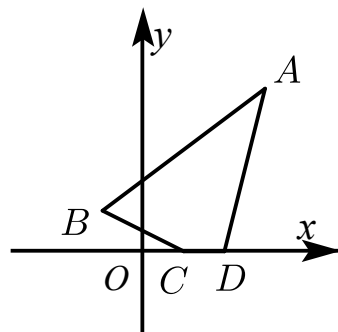


$$\therefore A'(-4, -6), B'(8, 2), \therefore \text{直线 } A'B' \text{ 的解析式为: } y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3},$$

$$\therefore M(5, 0), N(0, -\frac{10}{3}). \therefore m = 5, n = -\frac{10}{3}, \text{ 故答案为: } 5, -\frac{10}{3}.$$

【标注】【知识点】一次函数与轴对称最值问题

16. 已知点 A 的坐标为 $(3, 4)$ ，点 B 的坐标为 $(-1, 1)$ 时，在 x 轴上另取两点 C 、 D ，且 $CD = 1$ ．线段 CD 在 x 轴上平移，线段 CD 平移至何处时，四边形 $ABCD$ 的周长最小？求出此时点 C 的坐标．



【答案】 $(-\frac{2}{5}, 0)$ ．

【解析】 如图将点 A 向左平移一个单位得到 $A'(2, 4)$ ，作点 B 关于 x 轴对称点 $B'(-1, -1)$ ，连接 $A'B'$ ，交 x 轴于点 C ，将点 C 向右平移一个单位得到 D 点，连结 AB 、 BC 、 CD 、 AD ，则此时四边形 $ABCD$ 的周长最小．

设直线 $A'B'$ 的解析式为 $y = kx + b$ ，

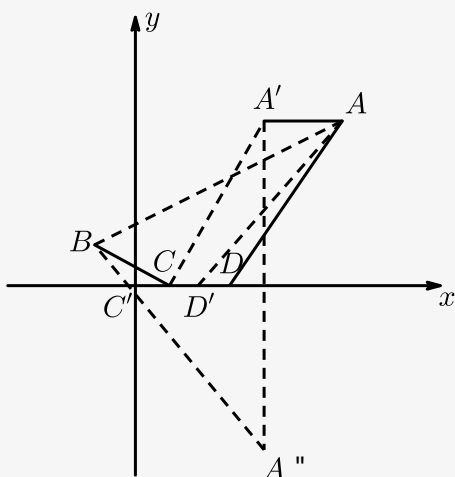
$$\text{则 } \begin{cases} 2k + b = 4 \\ -k + b = -1 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = \frac{5}{3} \\ b = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 $A'B'$ 的解析式为 $y = \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}$ ，

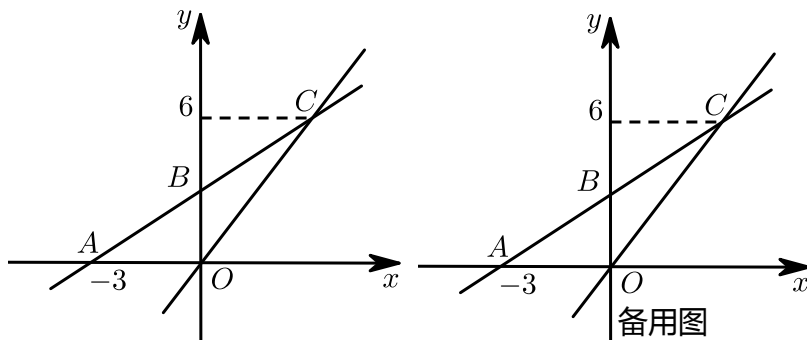
当 $y = 0$ 时， $\frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$ ，解得 $x = -\frac{2}{5}$ ．

故线段 CD 平移至如图所示位置时，四边形 $ABCD$ 的周长最小，此时点 C 的坐标为 $(-\frac{2}{5}, 0)$



【标注】【知识点】一次函数与轴对称最值问题

17. 如图，在平面直角坐标系中，一次函数 $y = mx + n (m \neq 0)$ 的图象与 x 轴交于点 $A(-3, 0)$ ，与 y 轴交于点 B ，且与正比例函数 $y = 2x$ 的图象交于点 C ，点 C 的纵坐标为6。



- (1) 求一次函数 $y = mx + n$ 的解析式。
 (2) 点 P 在 y 轴上，点 Q 在直线 OC 上，求 $CP + PQ$ 的最小值。

【答案】 (1) $y = x + 3$.

(2) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

【解析】 (1) $\because C$ 在 $y = 2x$ 上，且 C 的纵坐标为6，

$$\therefore 6 = 2x, \text{ 解得 } x = 3,$$

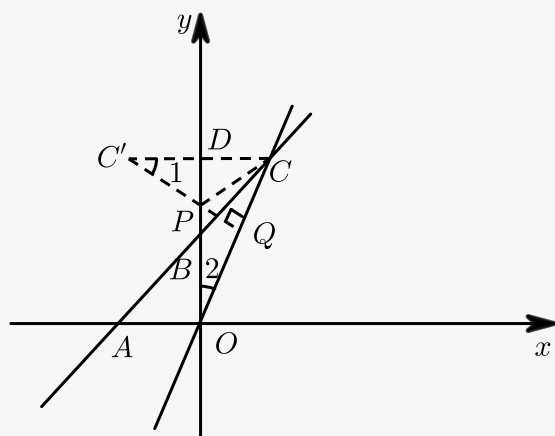
$$\therefore C(3, 6),$$

又 $\because$ 一次函数 $y = mx + n$ 过 $A(-3, 0)$ ， $C(3, 6)$ ，

$$\therefore \begin{cases} -3m + n = 0 \\ 3m + n = 6 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} m = 1 \\ n = 3 \end{cases},$$

$\therefore$ 一次函数解析式为 $y = x + 3$.

(2) 方法一：过 C 作 y 轴的对称点 C' ，过 C' 作 $C'Q \perp OC$ ， $C'Q$ 交 y 轴于点 P ，连接 CP ，此时 $CP + PQ$ 最小，



$\therefore C'$ 坐标为 $(-3, 6)$ ，

又 $\because C'Q \perp OC$ ，

$$\therefore k_{C'Q} = -\frac{1}{2}，$$

$\therefore$ 直线 $C'Q$ 的解析式为： $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ ，

$$\text{联立解析式：} \begin{cases} y = 2x \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \end{cases}，$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ y = \frac{18}{5} \end{cases}，$$

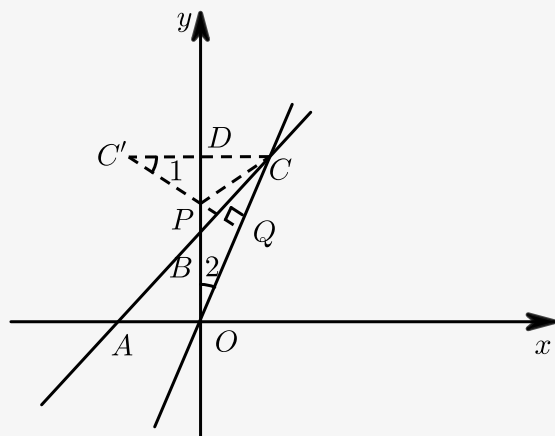
$\therefore Q$ 点坐标为 $(\frac{9}{5}, \frac{18}{5})$ ，

$$C'Q = \sqrt{\left(\frac{9}{5} + 3\right)^2 + \left(\frac{18}{5} - 6\right)^2} = \frac{12\sqrt{5}}{5}。$$

$\therefore CP + PQ$ 的最小值为 $\frac{12\sqrt{5}}{5}$ 。

方法二：过 C 作 C 关于 y 轴的对称点 C' ，

过 C 作 $CQ \perp OC$ ，此时， $C'Q$ 交 y 轴于点 P 时， $PQ + CP$ 最小，连接 CP ，



$\therefore$ 对称， CC' 交 y 轴于 D ，

$\therefore CP = C'P$ ， $C'(-3, 6)$ ，

$\therefore CP + PQ = C'P + PQ = C'Q$ ，

$$\therefore CC' = 6 ,$$

$$\because \angle 1 + \angle C' C Q = 90^\circ \quad CO = \sqrt{CD^2 + OD^2} = 3\sqrt{5} ,$$

$$\angle 2 + \angle C' C Q = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 ,$$

在 $\triangle C' C Q$ 和 $\triangle OCD$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 2 \\ \angle C' C Q = \angle C D O \end{cases} ,$$

$$\therefore \frac{CC'}{CO} = \frac{C'Q}{OD} ,$$

$$\therefore \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{C'Q}{6} ,$$

$$\therefore C'Q = \frac{12\sqrt{5}}{5} ,$$

$$\text{即 } CP + PQ \text{ 最小值为 } \frac{12\sqrt{5}}{5} .$$

【标注】【知识点】一次函数与轴对称最值问题